

geben sämtliche Profile, welche der Beziehung

$$\sigma_r = \sigma_0 \cdot f_r(r) \quad (8)$$

gehörten, Frequenzkurven der Gestalt

$$\Delta\Omega_r = g_r(\omega/\omega_0), \quad (9)$$

wobei für die normierenden Größen der Zusammenhang gilt:

$$\omega_0 \sigma_0 = \text{const.} \quad (10)$$

Bei affiner Abbildung des Leitfähigkeitsprofils in σ -Richtung wird die zugehörige Frequenzfunktion entsprechend Gl. (10) ebenfalls affin abgebildet.

3. Messung von Eichobjekten

Die hier beschriebenen Messungen sind an zweistufigen Modellen aus Graphit durchgeführt worden, mit

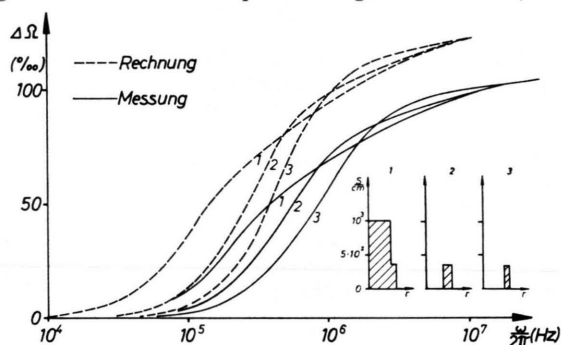


Abb. 2. Rechen- und Meßwerte verschiedener Leitfähigkeitsprofile.

denen der Verlauf einiger Profiltypen grob approximiert werden kann. Der Oszillator ist als kapazitive Dreipunktschaltung ausgeführt. Der Frequenzbereich reicht von 50 kHz bis 30 MHz. Die Feinverstimmlung der Frequenz wird durch Zuschalten von Kapazitäten erreicht, während die Grobeinstellung durch die Wahl geeignet bemessener Spulen geschieht. Die Meßgenauigkeit der Anordnung liegt unter 1‰ bezüglich der Reproduzierbarkeit. Bei Vergleichsmessungen ist allein die Kurzzeitstabilität des Oszillators entscheidend. Sie ist besser als 10^{-4} .

Die gezeigten Meßkurven sind der Übersicht wegen so korrigiert, daß ein stetiger Kurvenzug entsteht. Beim Wechsel der Spulen ändern sich nämlich gewisse Schaltungsparameter, so daß an den Spulen-Bereichs-Übergängen Unstetigkeiten im Meßkurvenverlauf auftreten. Alle Kurven laufen entsprechend den gleichen Randleitfähigkeiten und Abmessungen der Modelle bei etwa 10 MHz zusammen. Die Gegenüberstellung der Meßkurven mit den errechneten Werten ergibt qualitativ denselben Verlauf. Die Meßergebnisse liegen jedoch unter den Rechenwerten, was entsprechend den idealisierten Voraussetzungen der Rechnung zu erwarten ist.

Das beschriebene Meßverfahren bietet die Möglichkeit der Messung von Leitfähigkeitsprofilen ohne Störung des Objekts. Die Messung bleibt durch fremde magnetische und elektrische Felder weitgehend unbeeinflusst. Die Messung und Kontrolle einzelner Kennwerte ist kontinuierlich möglich. Für die Anwendung an ebenen Objekten kann die Anordnung abgewandelt werden.

Wir danken Herrn Prof. Dr. KLUGE für die Förderung dieser Arbeit.

Das paramagnetische Moment eines stromdurchflossenen Zylinders in einem longitudinalen Magnetfeld

H. BROSS * und R. JAGGI **

(Z. Naturforsch. 21 a, 2104—2105 [1966]; eingeg. am 9. November 1966)

The paramagnetic moment of a current-carrying cylinder in a longitudinal magnetic field is explained phenomenologically. Expressions in terms of the galvanomagnetic coefficients are given for three examples: cubic crystal, trigonal crystal, two-band model with spherical energy-surfaces and energy-independent relaxation times.

Vor kurzem wurde von einem von uns¹ ein paramagnetisches Moment an einem zylindrischen Wismut-Einkristall beobachtet, durch den ein Strom I hindurchgeschickt wurde und der sich außerdem in einem konstanten longitudinalen Magnetfeld H befand. Zur Erklärung dieser Erscheinung wurde die Bewegung der Elektronen und Löcher in den äußeren Feldern sowie im Eigenmagnetfeld des Stromes untersucht. In dieser

Mitteilung soll angedeutet werden, wie sich die Erscheinung völlig phänomenologisch mit den MAXWELLSchen Gleichungen deuten läßt, wenn man nur die durch die Magnetfelder verursachte Änderung des Tensors der elektrischen Leitfähigkeit berücksichtigt.

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an, daß das Eigenmagnetfeld

$$H_\varphi = \frac{2r}{c a^2} \cdot I \quad (1)$$

(a : Zylinderradius) des äußeren Stromes wesentlich kleiner als das äußere Magnetfeld H ist, so daß wir Glieder der Art H_φ gegen H vernachlässigen dürfen. Weiter wollen wir von jenem Magnetfeld absehen, das mit der azimuthalen Stromdichte j_φ verknüpft ist. Durch den obigen Ansatz für das Magnetfeld wird dann die erste Hälfte der MAXWELLSchen Gleichungen identisch befriedigt. Aus der Forderung, daß das \mathbf{E} -Feld wirbelfrei sein soll, folgt weiter, daß das Kreisintegral $\oint \mathbf{E}_\varphi d\varphi$ verschwinden muß, was in einem Kristall hoher Symmetrie und entsprechender Lage des äußeren

* Sektion Physik der Universität München.

** IMB Forschungslaboratorium, 8803 Rüschlikon, Schweiz.

¹ R. JAGGI, Naturwiss. 53, 104 [1966].



ren Magnetfeldes H durch $E_\varphi = 0$ erreicht werden kann. Da auf dem Zylindermantel kein radialer Strom auftritt, muß wegen $\text{div } \mathbf{j} = 0$ die radiale Stromdichte j_r durchwegs Null sein. Mit der Forderung $E_\varphi = 0$ liefert deshalb das OHMSche Gesetz den folgenden Zusammenhang zwischen der axialen und der azimuthalen Stromdichte:

$$j_\varphi = - \frac{\sigma_{\varphi z}}{\sigma_{\varphi \varphi}} j_z \\ = - \frac{\sigma_{xz} \sin \varphi - \sigma_{yz} \cos \varphi}{\sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - (\sigma_{xy} + \sigma_{yx}) \sin \varphi \cos \varphi} j_z, \quad (2)$$

wobei wir in der zweiten Hälfte der Gleichung schon die kartesischen Komponenten des Tensors σ eingesetzt haben.

Um das paramagnetische Moment M zu erhalten, muß die spezielle für jede Kristallklasse charakteristische Form von σ bekannt sein. Die gleich noch zu besprechenden Beispiele zeigen, daß es oft möglich ist, Gl. (2) in der Form

$$j_\varphi = \frac{\alpha H_\varphi H}{1 + \beta H^2} j_z \quad (3)$$

darzustellen, wobei α und β bestimmte Funktionen der galvanomagnetischen Konstanten sind. Für das paramagnetische Moment pro Längeneinheit ergibt sich dann der Ausdruck

$$M = \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{\alpha H}{1 + \beta H^2} J^2, \quad (4)$$

der analog zu dem früher¹ angegebenen gebaut ist.

Für drei Beispiele wollen wir nun die Parameter α und β durch die üblichen galvanomagnetischen Konstanten ausdrücken.

1. Kubischer Kristall

Bis zu quadratischen Gliedern hat nach KOHLER² der Tensor der elektrischen Leitfähigkeit die Gestalt

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 (\delta_{ij} + a' \varepsilon_{ijk} H_k + b' H^2 \delta_{ij} + c' H_i H_j + d' \delta_{ij} H_i^2) \quad (5)$$

(σ_0 : elektrische Leitfähigkeit im magnetfeldfreien Fall), so daß die in Gl. (2) vorkommenden Tensorkomponenten bei der speziellen Lage des Magnetfeldes durch

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_0 (1 + b' H^2) + O(H_\varphi^2), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = O(H_\varphi^2), \\ \sigma_{xz} &= -\sigma_0 (a' \cos \varphi + c' \sin \varphi H) H_\varphi, \\ \sigma_{yz} &= -\sigma_0 (a' \sin \varphi - c' \cos \varphi H) H_\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben sind. Durch Einsetzen in Gl. (2) und Vergleich mit Gl. (3) ergibt sich

$$\alpha = c' \quad \text{und} \quad \beta = b'. \quad (7)$$

2. Trigonaler Kristall (Wismut)

Nach KOHLER² sind die uns interessierenden Tensorkomponenten, wenn die trigonale Achse mit der z -Achse zusammenfällt, durch

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_0 + R_{1133} H^2 + O(H \cdot H_\varphi), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = O(H_\varphi^2), \\ \sigma_{yz} &= -R_{3113} \sin \varphi H_\varphi \cdot H + O(H_\varphi^2), \\ \sigma_{zx} &= +R_{3113} \cos \varphi H_\varphi \cdot H + O(H_\varphi^2) \end{aligned} \quad (8)$$

gegeben. Es wird somit

$$\begin{aligned} \sigma_0 \alpha &= R_{3113} = \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial H_x \partial H_z}, \\ \sigma_0 \beta &= R_{1133} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial H_z^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Zweibandmodell mit sphärischen Energieflächen und energieunabhängigen Relaxationszeiten

Für die uns interessierenden Tensorkomponenten ergibt sich in diesem Fall³

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0^{(1)}}{(1 + \omega_1^2 H^2)} + \frac{\sigma_0^{(2)}}{(1 + \omega_2^2 H^2)} + O(H \cdot H_\varphi), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = O(H_\varphi^2), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_0^{(1)} \frac{-\omega_1 H_y + \omega_1^2 H_x H_z}{(1 + \omega_1^2 H^2)} \\ &\quad + \sigma_0^{(2)} \frac{-\omega_2 H_y + \omega_2^2 H_x H_z}{(1 + \omega_2^2 H^2)}, \\ \sigma_{yz} &= \sigma_0^{(1)} \frac{+\omega_1 H_x + \omega_1^2 H_y H_z}{(1 + \omega_1^2 H^2)} \\ &\quad + \sigma_0^{(2)} \frac{-\omega_2 H_x + \omega_2^2 H_y H_z}{(1 + \omega_2^2 H^2)}, \end{aligned} \quad (10)$$

wobei $\omega_i = e \tau_i / c m_i$ gesetzt wurde.

Solange keine oszillatorischen Effekte auftreten, sind die obigen Beziehungen für beliebige Magnetfeldstärken richtig. Es ist deshalb nicht angebracht, Darstellungen für die Konstanten α und β anzugeben, die nur für schwache Magnetfelder richtig wären. Allgemein ist der Faktor $\alpha / (1 + \beta H^2)$ in Gl. (4) durch

$$\frac{\sigma_0^{(1)} (1 + \omega_2^2 H^2) \omega_1 + \sigma_0^{(2)} (1 + \omega_1^2 H^2) \omega_2}{\sigma_0^{(1)} (1 + \omega_2^2 H^2) + \sigma_0^{(2)} (1 + \omega_1^2 H^2)} \quad (11)$$

zu ersetzen. Für hohe Magnetfelder tritt also Sättigung ein.

² M. KOHLER, Ann. Phys. Lpz. **20**, 891 [1934].

³ H. JONES, Handbuch der Physik, herausgeg. von S. FLÜGGE, Bd. XIX, Springer, Berlin 1956.